تمارين حو النهايات

تمارين و حلولها

تمرين

حدد النهايات التالية

$\lim\limits_{x\to 2} 3+x-3x^2$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} -2x^4+3x^3+x-1$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^5+3x^3+x}{-5x^5+2x-1}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}$

و $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7x^4+x^2+1}{-x^8-2x-1}$ و $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2x+1}{x^2-3x+2}$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-2x+1}{x^2-x-2}$

و $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-2x+1}{x^2-x-2}$ و $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x}-x$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x}+x$ و

و $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x-2\sqrt{x+1}}$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ و $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin x}$ و $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\tan^2 x+2}$ و $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$

و $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}$ و $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

الجواب

نحدد النهايات

* $\lim\limits_{x\to 2} 3+x-3x^2=-7$ $\lim\limits_{x\to -\infty} -2x^4+3x^3+x-1=\lim\limits_{x\to -\infty} -2x^4=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^5+3x^3+x}{-5x^5+2x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^5}{-5x^5}=-\dfrac{2}{5}$

* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}=\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x^6}{x^3}=\lim\limits_{x\to -\infty} -3x^3=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7x^4+x^2+1}{-x^8-2x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7x^4}{-x^8}=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-7}{x^4}=0$

* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-3}{x+3}=-\dfrac{1}{4}$

* نحدد $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2x+1}{x^2-3x+2}$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-3x+2=0^-$ $\lim\limits_{x\to 1^+} -2x+1=-1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2x+1}{x^2-3x+2}=+\infty$

* لدينا $\lim_{x\to 2} x^2-x-2=0$ و $\lim_{x\to 2} -2x+1=-3$

x	$-\infty$		-1		2	$+\infty$
x^2-x-2		+	0	-	0	+

ومنه $\lim_{x\to 2^+} x^2-x-2=0^+$ و $\lim_{x\to 2^-} x^2-x-2=0^-$

إذن $\lim_{x\to 2^-} \frac{-2x+1}{x^2-x-2}=+\infty$; $\lim_{x\to 2^+} \frac{-2x+1}{x^2-x-2}=-\infty$

* $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=1$$

* لدينا $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

و حيث x تؤول إلى $+\infty$ فان x موجبة ومنه $|x|=x$

ومنه $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

* $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}$$

و حيث x تؤول إلى $-\infty$ فان x سالبة ومنه $|x|=-x$

إذن $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}=-\frac{1}{2}$$

* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

و حيث x تؤول إلى $+\infty$ فان x موجبة ومنه $|x|=x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=1$$

* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=2$$

* لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\times\dfrac{\sin 5x}{5x}\times 5$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

و حيث $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$ فان $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin x}=1\times 1\times 5=5$

* لدينا $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan^2 x=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\tan^2 x+2}=0$

* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+1}+1=2$ إذن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x\cdot\sin x}{2\sin 2x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}-\tan x=0$

* لدينا $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\dfrac{(1+\sin x)\cos x}{1-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=$

لدينا $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}1+\sin x=2$ و $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\cos x=0^-$ لأن $\cos x\prec 0$ $\forall x\in\left]-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right[$

ومنه $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=-\infty$

تمرين2

بين أن $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

الجواب

لدينا $-1\le\sin\dfrac{1}{x}\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ ومنه $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\le|x|$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

و حيث أن $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ فان $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

تمرين3

نعتبر g دالتين عددية للمتغير حقيقي x حيث $g(x)=\dfrac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}$

1- حدد $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

3- بين أن $|g(x)|\le\dfrac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

الجواب

1- نحدد $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\sqrt{2-\cos x}+1}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0} 2-\cos x=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2-\cos x}+1}=\frac{1}{2}$

وحيث $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ فان $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

2- نبين أن $\left|g(x)\right|\le\frac{1}{x^2}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$

$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad -1\le\cos x\le 1\Leftrightarrow 1\le 2-\cos x\le 3\Leftrightarrow 0\le\sqrt{2-\cos x}-1\le\sqrt{3}-1\prec 1$

$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad \left|g(x)\right|=\left|\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}\right|=\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}$

لدينا $0\le\sqrt{2-\cos x}-1\prec 1$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$ و منه $0\le\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}\prec\frac{1}{x^2}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$

إذن $\left|g(x)\right|\le\frac{1}{x^2}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$

نستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

لدينا $\left|g(x)\right|\le\frac{1}{x^2}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

تمارين غير محلولة

تمرين1

حدد $\lim\limits_{x\to -2} 2x^2-6x-1$; $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2-2x}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{x^2-3x}$; $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2-12}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{2x^2-x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2-1}-x}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$

تمرين2

نعتبر f دالة عددية

أدرس نهاية f على يمين ويسار x_0 و استنتج هل f تقبل نهاية في x_0 في الحالتين التاليتين

أ- $x_0=2$ $\quad\begin{cases} f(x)=\frac{-4+x^2}{x-2} & x\succ 2\\ f(x)=\sqrt{x^2+12} & x\le 2\end{cases}$

ب- $x_0=1$ $\quad\begin{cases} f(x)=\frac{(x-1)^2}{|x-1|} & x\ne 1\\ f(1)=2\end{cases}$

تمرين3

حدد $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{\sin 5x-\sin x}$ $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x+\sin x}{x+\frac{\pi}{4}}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x+\sin 3x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{\sin x+\sin 2x}$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\tan x$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\left(x^2-2x\right)}{x-2}$

تمرين4

حدد $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-2x}{x-3}$ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-2}{\sqrt{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x-6}$ $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x-6}$ $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-2x}{x-3}$

تمرين5

حدد $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3x^6-2x}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2-5x}{-6x^4-2x}$ $\lim\limits_{|x|\to+\infty}5x^3-3x$; $\lim\limits_{|x|\to+\infty}-4x^2-6x-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x+1}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}+x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ (نضع $x=\dfrac{1}{t}$) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x+2x$

تمرين6

حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب النهايات عند محدات D_f

أ- $f(x)=2x^2-3x$ ب- $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+4}$

ج- $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ د- $f(x)=2x-\sqrt{x^2+5x+6}$

تمرين7

أحسب النهايات $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{5x^2-3x}{x^2-3x-10}$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x-2}}{x^2-x-2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}+x-1$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\cos 2x}{1-\sin x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1+\sin^2 x}}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1-\sqrt{2}\cos x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2\left(x^2-x\right)}{x^2}$